

Examen HAVO

2019

tijdvak 1  
donderdag 9 mei  
13.30 - 16.30 uur

**wiskunde A**

Dit examen bestaat uit 23 vragen.

Voor dit examen zijn maximaal 78 punten te behalen.

Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd.

Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

**Vuistregels voor de grootte van het verschil van twee groepen**

2x2 kruistabel  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , met  $phi = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}}$ ,

waarin  $a$ ,  $b$ ,  $c$  en  $d$  absolute aantallen zijn.

- als  $phi < -0,4$  of  $phi > 0,4$ , dan zeggen we "het verschil is groot",
- als  $-0,4 \leq phi < -0,2$  of  $0,2 < phi \leq 0,4$ , dan zeggen we "het verschil is middelmatig",
- als  $-0,2 \leq phi \leq 0,2$ , dan zeggen we "het verschil is gering".

Maximaal verschil in cumulatief percentage ( $\max V_{cp}$ )

(met voor beide groepen een steekproefomvang  $n > 100$ )

- als  $\max V_{cp} > 40$ , dan zeggen we "het verschil is groot",
- als  $20 < \max V_{cp} \leq 40$ , dan zeggen we "het verschil is middelmatig",
- als  $\max V_{cp} \leq 20$ , dan zeggen we "het verschil is gering".

Effectgrootte  $E = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\frac{1}{2}(S_1 + S_2)}$ , met  $\bar{X}_1$  en  $\bar{X}_2$  de steekproefgemiddelden

( $\bar{X}_1 \geq \bar{X}_2$ ),  $S_1$  en  $S_2$  de steekproefstandaardafwijkingen

- als  $E > 0,8$ , dan zeggen we "het verschil is groot",
- als  $0,4 < E \leq 0,8$ , dan zeggen we "het verschil is middelmatig",
- als  $E \leq 0,4$ , dan zeggen we "het verschil is gering".

Twee boxplots vergelijken

- als de boxen<sup>1)</sup> elkaar niet overlappen, dan zeggen we "het verschil is groot",
- als de boxen elkaar wel overlappen en een mediaan van een boxplot buiten de box van de andere boxplot ligt, dan zeggen we "het verschil is middelmatig",
- in alle andere gevallen zeggen we "het verschil is gering".

noot 1 De 'box' is het interval vanaf het eerste kwartiel tot en met het derde kwartiel.

## Betrouwbaarheidsintervallen

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie is

$p \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ , met  $p$  de steekproefproportie en  $n$  de steekproefomvang.

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde is

$\bar{X} \pm 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$ , met  $\bar{X}$  het steekproefgemiddelde,  $n$  de steekproefomvang en

$S$  de steekproefstandaardafwijking.

## Stil asfalt

Wie naast een snelweg woont, heeft bijna altijd te maken met overlast door de geluidsintensiteit van het verkeer. De laatste jaren probeert men deze overlast te beperken, onder andere door het aanleggen van zogenaamd stil asfalt.

Met de volgende formule kan de geluidsintensiteit  $I$  worden berekend als bekend is hoeveel decibel (dB) geluid er wordt geproduceerd.



$$I = 10^{0,1d-9}$$

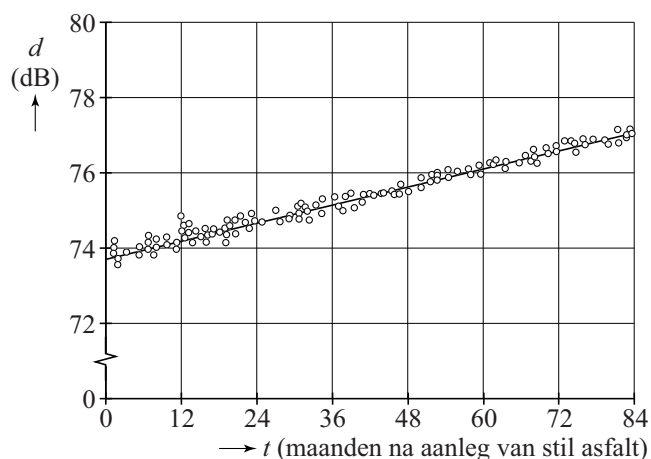
Hierin is  $d$  de hoeveelheid geproduceerd geluid in dB en is  $I$  de geluidsintensiteit in milliwatt per  $m^2$ .

Een weggedeelte wordt opnieuw geasfalteerd, waarbij het oude asfalt wordt vervangen door stil asfalt. De hoeveelheid geproduceerd geluid daalt daardoor van 80 dB naar 74 dB.

- 4p 1 Bereken met hoeveel procent de geluidsintensiteit afneemt. Geef je antwoord in hele procenten.

Uit metingen blijkt dat de hoeveelheid geproduceerd geluid op stil asfalt door de jaren heen stijgt. Dit komt onder andere door slijtage van het asfalt. In de figuur zijn de resultaten van een aantal metingen weergegeven.

figuur



De meetgegevens liggen op en rond de lijn die door de punten  $(0; 73,7)$  en  $(84; 77,0)$  gaat. De formule van deze lijn is  $d = a \cdot t + 73,7$ . Hierin is  $d$  de hoeveelheid geproduceerd geluid in dB,  $t$  de tijd in maanden na het aanleggen van stil asfalt en  $a$  een constant getal.

Afgerond op twee decimalen geldt  $a = 0,04$ . De waarde van  $a$  kan nauwkeuriger berekend worden.

- 2p **2** Bereken  $a$  met behulp van de gegeven punten. Geef je antwoord in drie decimalen.

Je kunt de formule van  $d$  invullen in de formule van  $I$ . Dan ontstaat een nieuwe formule waarin de geluidsintensiteit  $I$  uitgedrukt is in het aantal maanden  $t$  na het aanleggen van stil asfalt. Deze formule luidt:

$$I = 10^{0,1(0,04t+73,7)-9}$$

Stil asfalt moet volgens planning worden vervangen als de geluidsintensiteit  $I$  volgens de formule groter wordt dan 0,058 milliwatt per  $m^2$ .

- 3p **3** Bereken met behulp van de laatste formule hoeveel hele maanden stil asfalt volgens planning meegaat.

## Homeopathische middelen

Homeopathische middelen worden gemaakt uit grondstoffen die worden gehaald uit planten, dieren of mineralen. Uit deze grondstoffen wordt allereerst een basisstof gemaakt, de zogenoemde **oertinctuur**.

Oertinctuur is echter nog niet geschikt voor gebruik. Daarvoor moet deze een aantal keren verdund worden. Na deze verdunningen ontstaat dan een homeopathisch middel dat gereed is voor gebruik.



Voor het verdunnen worden verschillende verdunningsreeksen gebruikt. Zie de tabel.

### tabel

D-reeks	verdunningen van 1 : 10
C-reeks	verdunningen van 1 : 100
LM-reeks	verdunningen van 1 : ...

Om aan te geven welke verdunningen een oertinctuur ondergaan heeft, voegt men aan de Latijnse naam van het homeopathische middel een letter en een getal toe. Zo bestaat bijvoorbeeld het middel Arnica D3. De toevoeging D3 geeft aan dat de oertinctuur Arnica driemaal een verdunning van 1 : 10 heeft ondergaan. Het homeopathisch middel Arnica D3 bestaat dus voor 1/1000e deel uit de oertinctuur Arnica.

- 3p 4 Bereken welk deel van het homeopathisch middel Sulphur C6 uit de oertinctuur Sulphur bestaat.

Naast de D-reeks zijn er ook de C-reeks en de LM-reeks.  
In de C-reeks is er sprake van verdunningen waarin bij elke verdunningsstap de hoeveelheid oertinctuur in het middel 99% minder wordt.

In de LM-reeks is er sprake van verdunningen waarin bij elke verdunningsstap de hoeveelheid oertinctuur in het middel 99,998% minder wordt.

- 3p **5** Bereken welk getal er in de tabel op de puntjes moet komen te staan.

In de D-reeks wordt het percentage oertinctuur in een homeopathisch middel bij elke verdunning tien keer zo klein. Er geldt dus:

$$P = 100 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^n$$

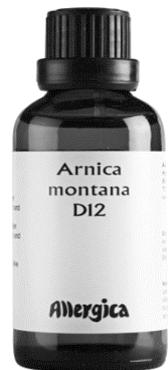
Hierin is  $P$  het percentage oertinctuur in een homeopathisch middel in de D-reeks en  $n$  het aantal verdunningen dat de oertinctuur ondergaan heeft.

Je kunt de formule van  $P$  herleiden tot de volgende formule:

$$P = 10^{2-n}$$

- 3p **6** Geef deze herleiding.

Iemand beweert dat de verdunning van de hoeveelheid oertinctuur in Arnica montana D12 gelijk is aan de verhouding van het volume van één waterdruppel tot het volume van 20 olympische zwembaden.



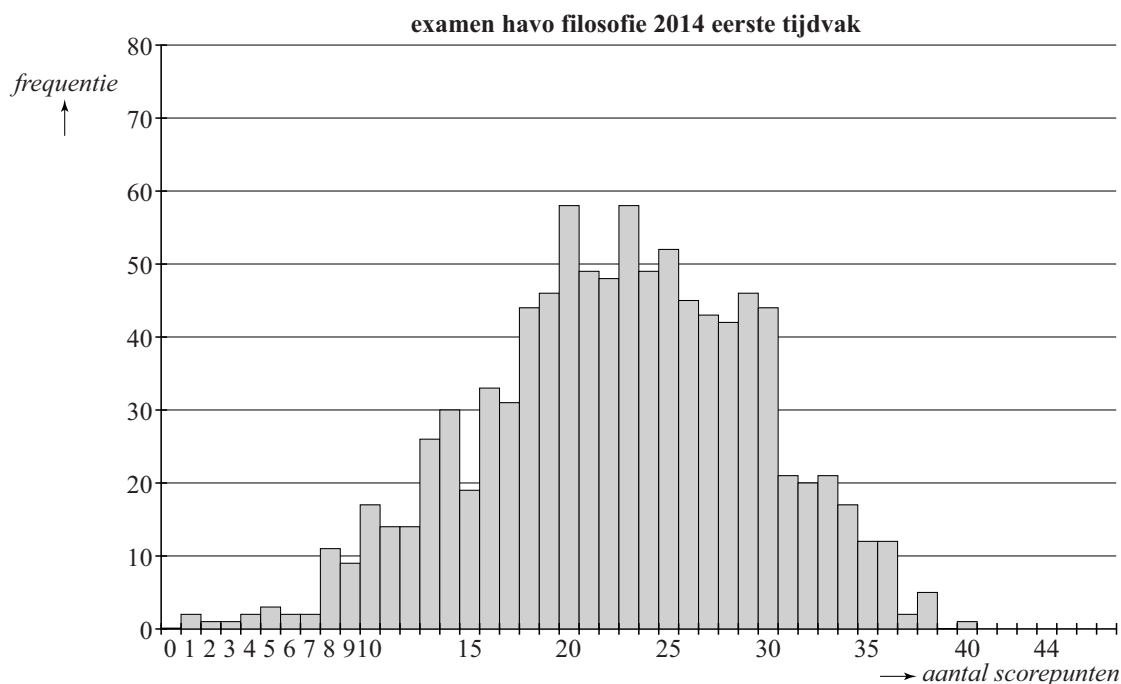
Een waterdruppel bevat ongeveer 0,05 milliliter en een olympisch zwembad heeft een inhoud van ongeveer 2,5 miljoen liter water.

- 4p **7** Laat zien dat de bewering klopt.

## Examenanalyse

Ieder jaar worden de resultaten van de examens door Cito geanalyseerd. In deze opgave bekijken we de resultaten van twee examens havo 2014 eerste tijdvak, namelijk het examen filosofie en het examen Engels. Het examen filosofie werd door ongeveer 1500 kandidaten gemaakt. Cito heeft de resultaten van 950 kandidaten binnengekregen en geanalyseerd. De resultaten van de analysegroep staan in figuur 1 en in de tabel op de uitwerkbijlage.

**figuur 1**



Voor het examen filosofie konden maximaal 44 scorepunten behaald worden. Zowel in de figuur als in de tabel op de uitwerkbijlage kun je zien dat de twee zwakste kandidaten in de analysegroep slechts 1 scorepunt behaalden en dat de beste kandidaat 40 scorepunten behaalde.

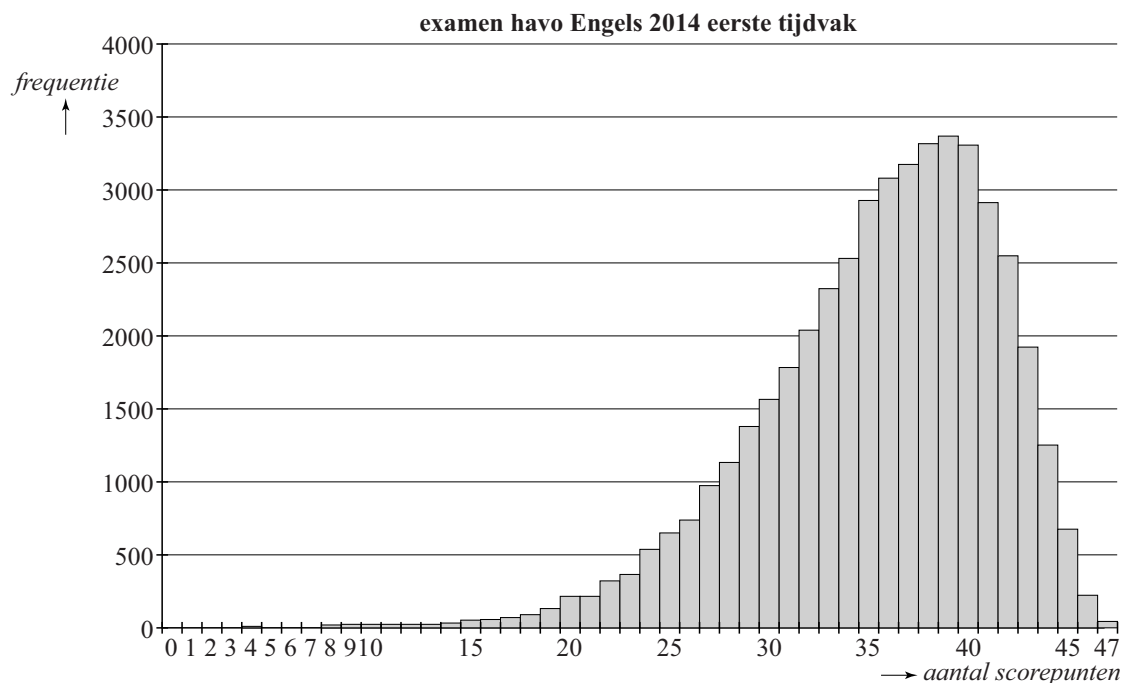
Het examen filosofie had een gemiddelde score van 22,5 met een standaardafwijking van 6,9. We bekijken de zwakste kandidaten in de analysegroep, met een score die meer dan tweemaal de standaardafwijking lager ligt dan het gemiddelde.

Als de scores normaal verdeeld zouden zijn, zou je met behulp van een vuistregel van de normale verdeling kunnen berekenen hoeveel kandidaten met zo'n score er in de analysegroep waren. De scores zijn echter niet normaal verdeeld. Het aantal kandidaten met zo'n lage score in de analysegroep blijkt toch ongeveer gelijk te zijn aan het aantal dat je op grond van de normale verdeling zou verwachten.



Van het examen Engels, dat door ruim 56 000 kandidaten is gemaakt, zijn de resultaten van 45 813 kandidaten geanalyseerd. Deze resultaten staan in figuur 2 en ook in de tabel op de uitwerkbijlage. Voor dit examen konden maximaal 47 scorepunten behaald worden. De gemiddelde score was 35,6 en de standaardafwijking 5,7.

**figuur 2**



Door gebruik te maken van figuur 2 en de tabel voor Engels op de uitwerkbijlage kun je berekenen hoe groot het verschil is tussen de modus en de mediaan van het aantal scorepunten voor het examen Engels.

4p **9** Bereken dit verschil. Licht je werkwijze toe.

Voor het examen filosofie behaalde 22,8% van de kandidaten in de analysegroep een onvoldoende (een cijfer lager dan 5,5).

3p **10** Laat zien dat het percentage onvoldoendes voor het examen Engels iets meer dan de helft daarvan was.

3p **11** Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het percentage kandidaten met een onvoldoende voor filosofie. Geef de grenzen in één decimaal.

Een Cito-medewerker wil de samenhang tussen de scores van de examens filosofie en Engels onderzoeken. Zij vraagt zich af of een hoge score voor filosofie ook een hoge score voor Engels betekent.

3p **12** Welke grafische weergave is daarvoor het meest geschikt en welke extra informatie is nodig om die grafische weergave te kunnen maken?

# uitwerkbijlage

8 t/m 12

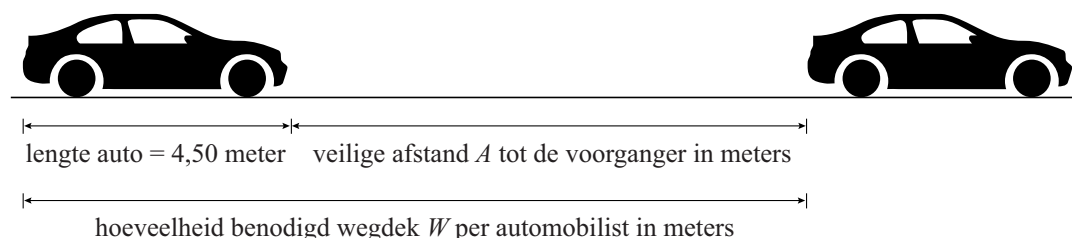
filosofie		
aantal scorepunten	cijfer	cumulatieve frequentie
0	1,0	0
1	1,4	2
2	1,8	3
3	2,2	4
4	2,6	6
5	2,8	9
6	3,0	11
7	3,2	13
8	3,4	24
9	3,6	33
10	3,8	50
11	4,1	64
12	4,3	78
13	4,5	104
14	4,7	134
15	4,9	153
16	5,1	186
17	5,3	217
18	5,5	261
19	5,7	307
20	5,9	365
21	6,1	414
22	6,3	462
23	6,5	520
24	6,7	569
25	6,9	619
26	7,1	664
27	7,3	707
28	7,5	749
29	7,7	795
30	7,9	839
31	8,1	860
32	8,3	880
33	8,6	901
34	8,8	918
35	9,0	930
36	9,2	942
37	9,3	944
38	9,4	949
39	9,5	949
40	9,6	950
41	9,7	950
42	9,8	950
43	9,9	950
44	10,0	950

Engels		
aantal scorepunten	cijfer	cumulatieve frequentie
0	1,0	0
1	1,1	0
2	1,2	0
3	1,3	0
4	1,4	1
5	1,5	1
6	1,6	1
7	1,7	1
8	1,8	2
9	1,9	7
10	2,0	8
11	2,1	9
12	2,3	18
13	2,5	33
14	2,7	55
15	2,9	100
16	3,1	154
17	3,3	216
18	3,4	305
19	3,6	430
20	3,8	630
21	4,0	845
22	4,2	1162
23	4,4	1527
24	4,6	2057
25	4,8	2698
26	5,0	3431
27	5,2	4401
28	5,4	5530
29	5,6	6898
30	5,7	8456
31	5,9	10 237
32	6,1	12 271
33	6,3	14 585
34	6,5	17 118
35	6,7	20 041
36	6,9	23 119
37	7,1	26 293
38	7,3	29 606
39	7,5	32 967
40	7,7	36 267
41	7,9	39 184
42	8,1	41 724
43	8,5	43 646
44	8,9	44 904
45	9,2	45 571
46	9,6	45 780
47	10,0	45 813

## File voorkomen

Veel verkeersongevallen worden veroorzaakt door auto's die te dicht op elkaar rijden. Om ongevallen te voorkomen moeten automobilisten een minimale afstand tot hun voorganger houden. Men noemt dit de **veilige afstand**. Zie de figuur.

figuur



De veilige afstand tussen een auto en zijn voorganger hangt af van de snelheid waarmee gereden wordt. Als beide auto's even snel rijden, geldt:

$$A = v \cdot \left( \frac{v}{188} + 0,14 \right)$$

Hierin is  $v$  de snelheid van beide auto's in km per uur en  $A$  de veilige afstand in meters.

Twee auto's rijden achter elkaar met een snelheid van 93 km per uur. De afstand tussen de twee auto's is 50 meter.

- 3p 13 Onderzoek of de achterste automobilist minimaal de veilige afstand tot zijn voorganger aanhoudt.

De veilige afstand wordt groter als de snelheid toeneemt.

- 3p 14 Beredeneer, zonder getallenvoorbeelden te gebruiken, dat de formule hiermee in overeenstemming is.

Je kunt de formule van  $A$  herleiden tot een vorm zonder haakjes. Met behulp van de informatie in de figuur kun je vervolgens een formule opstellen van de hoeveelheid wegdek  $W$  in meters die een automobilist nodig heeft als hij de veilige afstand aanhoudt. We gaan ervan uit dat de lengte van een auto 4,50 meter is.

De formule van  $W$  is te schrijven in de vorm  $W = \dots \cdot v^2 + \dots \cdot v + \dots$

- 3p 15 Stel de formule van  $W$  op en herleid de formule tot de bovenstaande vorm, waarbij op de puntjes getallen staan. Geef deze getallen in twee decimalen.

Wegbeheerder Rijkswaterstaat heeft voor een bepaald stuk snelweg een formule opgesteld voor het maximale aantal auto's dat in een bepaalde tijd over dit stuk snelweg kan rijden, de zogenaamde capaciteit  $C$ . Deze formule luidt:

$$C = \frac{1000v}{4,5 + 0,09v + 0,0035v^2}$$

In deze formule is  $v$  de snelheid in km per uur en  $C$  de capaciteit in aantal auto's per uur.

Het blijkt dat volgens de formule de grootste waarde van  $C$  op dit stuk snelweg bereikt wordt bij een vrij lage snelheid.

- 3p **16** Bereken bij welke snelheid hiervan sprake is. Geef je antwoord in hele km per uur.

Als er meer automobilisten van dit stuk snelweg gebruik willen maken dan volgens de capaciteit  $C$  mogelijk is, ontstaat er een file. Dit kan voorkomen worden als iedereen tijdig zijn snelheid aanpast.

Op matrixborden boven de snelweg geeft Rijkswaterstaat dan een maximumsnelheid aan (in hele km per uur). Dit is de hoogste snelheid die voorkomt dat een file ontstaat.

Op dit stuk snelweg moet in de avondspits de capaciteit minimaal 2500 auto's per uur zijn om een file te voorkomen.

- 4p **17** Bereken welke maximumsnelheid Rijkswaterstaat in deze situatie op de matrixborden aangeeft.

Rijkswaterstaat heeft op dit stuk snelweg gedurende één maandagmorgen metingen verricht en bijgehouden hoeveel auto's er passeerden. In de tabel zie je de resultaten gedurende één uur. Op dit stuk snelweg is een maximumsnelheid van 130 km per uur toegestaan.

**tabel**

<b>tijdsinterval</b>	<b>aantal auto's</b>	<b>tijdsinterval</b>	<b>aantal auto's</b>	<b>tijdsinterval</b>	<b>aantal auto's</b>
7.00-7.05 uur	73	7.20-7.25 uur	174	7.40-7.45 uur	235
7.05-7.10 uur	104	7.25-7.30 uur	198	7.45-7.50 uur	267
7.10-7.15 uur	142	7.30-7.35 uur	220	7.50-7.55 uur	282
7.15-7.20 uur	189	7.35-7.40 uur	224	7.55-8.00 uur	265

We nemen aan dat het aantal auto's per tijdsinterval gelijkmatig over het tijdsinterval verdeeld is. Je kunt dan met behulp van de formule van  $C$  bij benadering vaststellen vanaf welk moment de automobilisten vanwege de capaciteit een lagere snelheid dan 130 km per uur moesten gaan aanhouden.

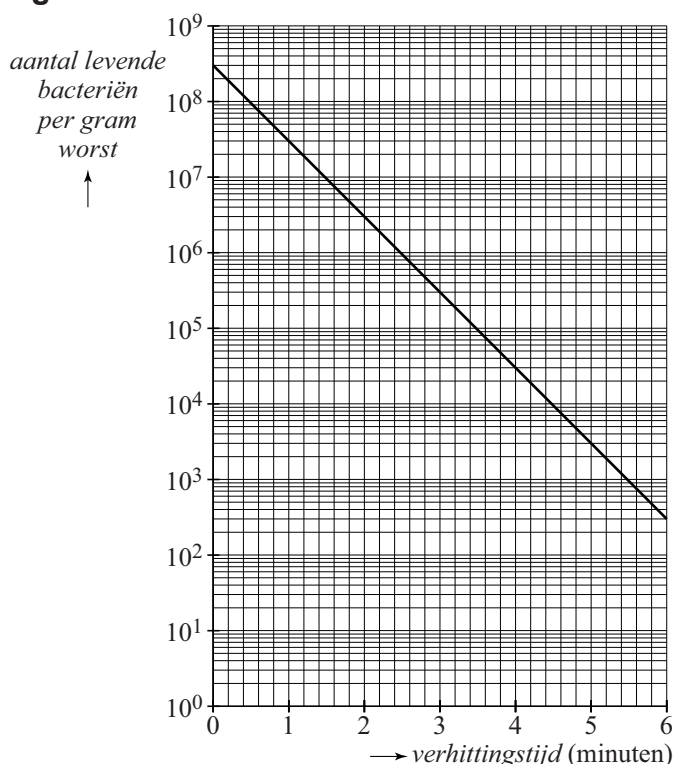
- 3p **18** Bereken binnen welk tijdsinterval de automobilisten voor het eerst een lagere snelheid moesten gaan aanhouden.

## Pasteurisatie

Sommige levensmiddelen kunnen langer houdbaar worden gemaakt door ze te verhitten. Door verhitting zullen de meeste bacteriën in deze levensmiddelen afsterven. Hoe langer er wordt verhit, hoe meer bacteriën er afsterven.

Bij een bepaald type worst is in figuur 1 het aantal levende bacteriën per gram worst uitgezet tegen de verhittingstijd in minuten. Daarbij is de verhittingstemperatuur 70 °C. In deze figuur, die vergroot op de uitwerkbijlage staat, is op de verticale as een logaritmische schaalverdeling gebruikt.

**figuur 1**

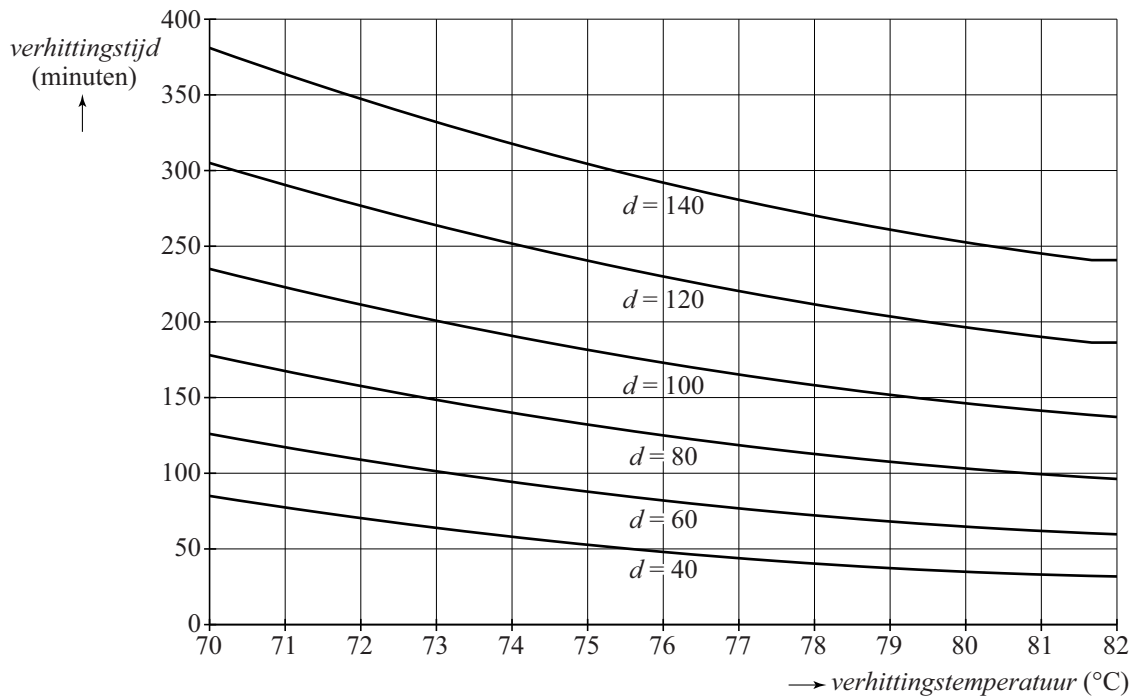


In figuur 1 kun je bijvoorbeeld aflezen dat er bij aanvang van de verhitting 300 000 000 levende bacteriën per gram worst aanwezig zijn. Na 6 minuten verhitting is dit aantal gedaald tot 300.

- 3p 19 Bepaal na hoeveel minuten verhitting 90% van de bacteriën is afgestorven. Je kunt hierbij de uitwerkbijlage gebruiken.

Vaak worden worsten veel langer dan een paar minuten verhit. Als een verhitting onder de 100 °C heeft plaatsgevonden, noemt men dit pasteurisatie. De onderzoeksorganisatie TNO heeft richtlijnen opgesteld voor het pasteurisatieproces. Hiermee kan een slager die zelf worst maakt, bepalen welke verhittingstemperatuur en verhittingstijd nodig zijn. In figuur 2 zie je de verhittingstemperaturen en verhittingstijden van worsten met diameters  $d$  van 40 tot en met 140 mm met tussenstappen van 20 mm. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

**figuur 2**



In de figuur op de uitwerkbijlage kun je aflezen dat een worst met een diameter van 100 mm bij een verhittingstemperatuur van 80 °C een verhittingstijd van 145 minuten nodig heeft.

Een veelgebruikte verhittingstemperatuur is 75 °C.

- 4p 20 Teken in het assenstelsel op de uitwerkbijlage met behulp van figuur 2 een grafiek waarin de verhittingstijd is uitgezet tegen de diameter bij een verhittingstemperatuur van 75 °C.

In plaats van figuur 2 gebruiken sommige slaggers ook wel formules om de verhittingstijd te berekenen. Bij een verhittingstemperatuur van 78 °C berekent men de verhittingstijd  $V$  dan met de formule:

$$V = 0,7d + 0,0089d^2$$

Hierin is  $V$  de verhittingstijd in minuten en  $d$  de diameter van de worst in mm.

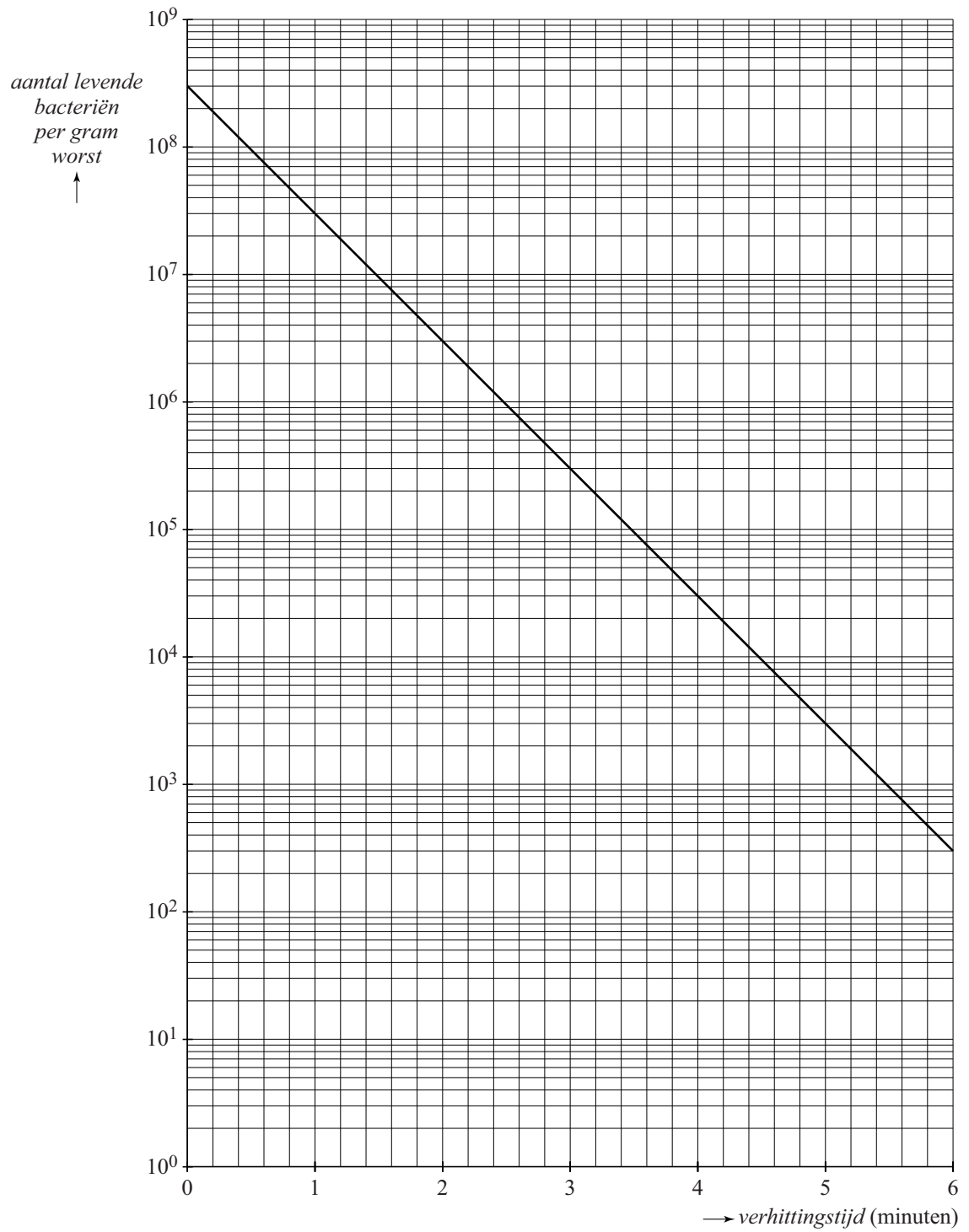
- 3p 21 Bereken met de formule de verhittingstijd van een worst met een diameter van 4,5 cm bij een verhittingstemperatuur van 78 °C. Geef je antwoord in hele minuten.

Een slager maakt worsten met verschillende diameters en kiest bij het pasteuriseren altijd voor een verhittingstemperatuur van 78 °C. Hij wil het pasteurisatieproces niet langer dan 2,5 uur laten duren.

- 4p 22 Bereken met de formule welke diameter deze worsten maximaal mogen hebben. Geef je antwoord in hele mm.

# uitwerkbijlage

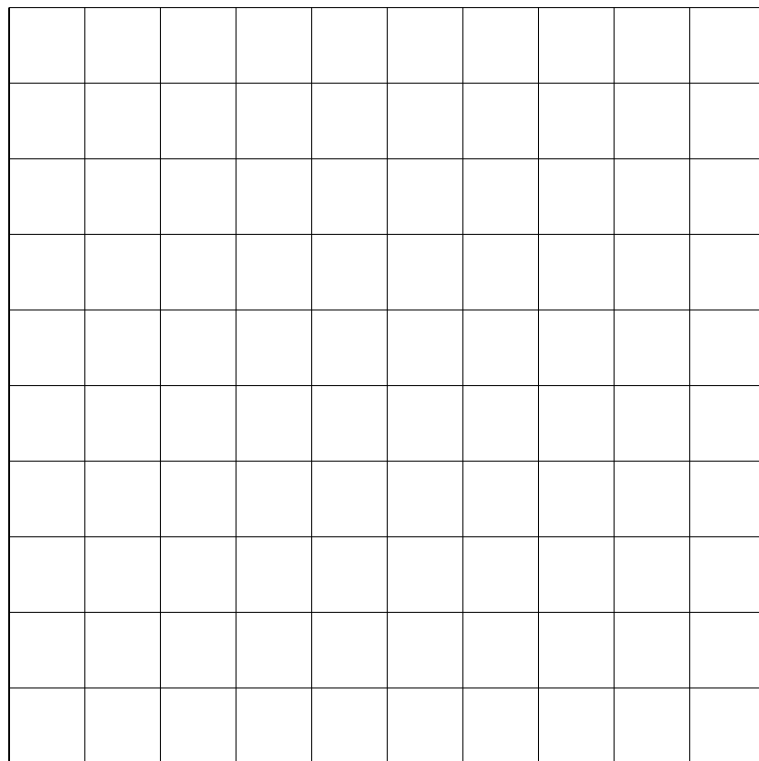
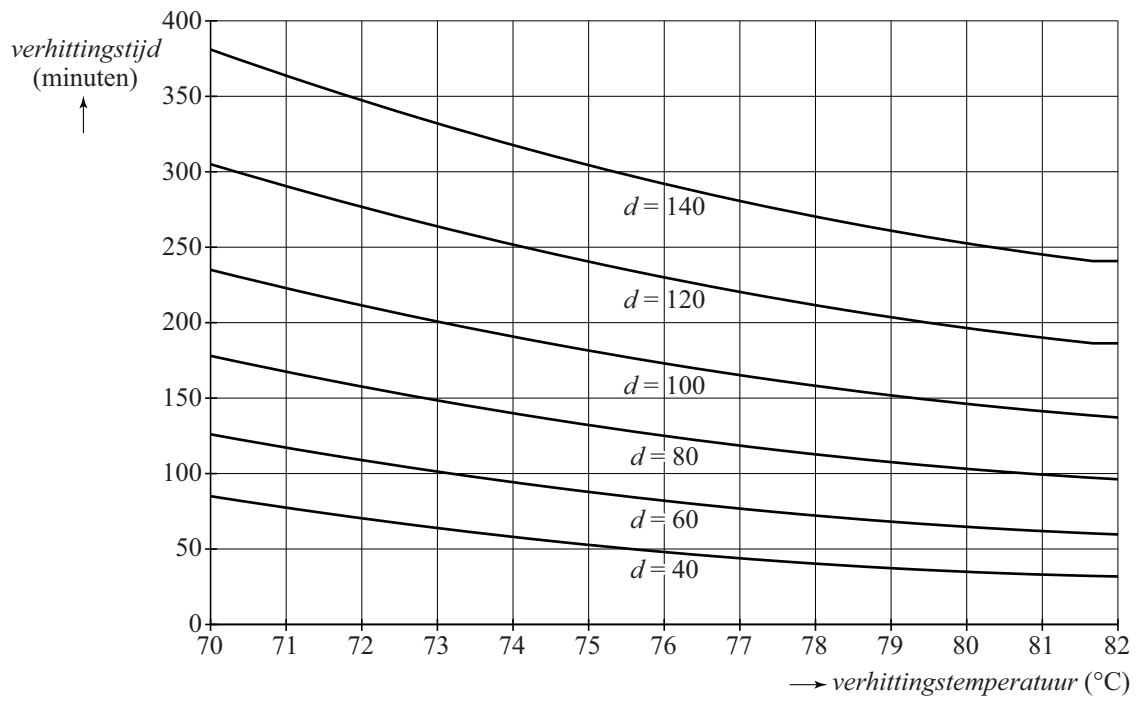
19





# uitwerkbijlage

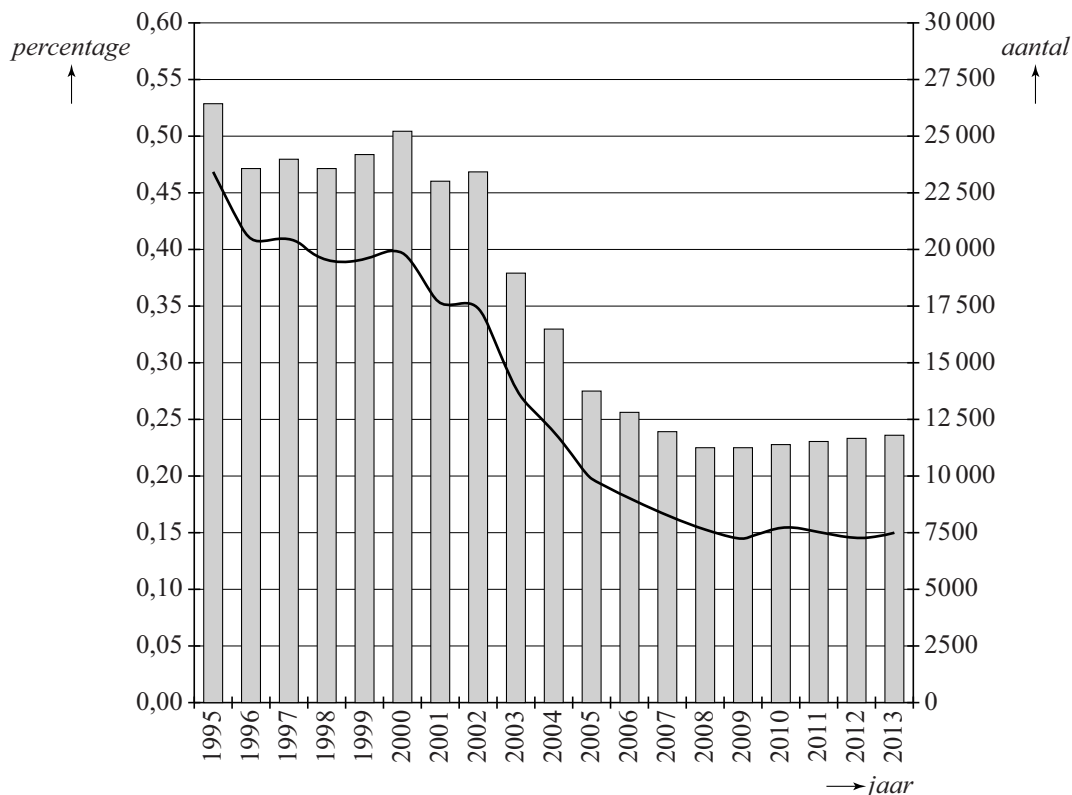
20



## Autodiefstal

Elk jaar wordt een percentage van de auto's in Nederland gestolen. Dit percentage is aan het begin van deze eeuw flink gedaald. In de figuur is voor de jaren 1995 tot en met 2013 zowel het percentage gestolen personenauto's (kromme) als het aantal gestolen personenauto's (staafdiagram) weergegeven.

**figuur gestolen personenauto's Nederland 1995-2013**



In de figuur is te zien dat in de laatste weergegeven jaren het percentage gestolen personenauto's ongeveer gelijk aan 0,15% bleef.

Ook als dit de volgende jaren zo zou blijven, dan nog neemt het aantal gestolen personenauto's toe, omdat het aantal personenauto's in Nederland toeneemt. In de tabel is voor een aantal jaren het aantal personenauto's in Nederland weergegeven.

**tabel**

jaar	2001	2004	2007	2010	2013
<b>aantal personenauto's in Nederland (in miljoenen)</b>	6,55	6,90	7,24	7,59	7,93

Uit de tabel is af te leiden dat het aantal personenauto's bij benadering lineair toeneemt. Neem aan dat de komende jaren het percentage gestolen personenauto's blijft zoals in 2013 en dat het aantal personenauto's lineair blijft toenemen zoals in de tabel.

- 6p **23** Bereken in welk jaar er voor het eerst weer meer personenauto's gestolen zullen worden dan in 2005.